Aula 11

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, dado um intervalo $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, com $-\infty \leq a < b \leq \infty$ diz-se que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma **solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

se

- $\varphi \in C^1(I)$
- o gráfico de φ em I, ou seja, o conjunto $\{(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; t \in I\}$ está contido em Ω.
- Para todo o $t \in I$ verifica-se

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \mathbf{f}(t, \varphi(t)).$$

Se $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ diz-se que φ é **solução do problema de valor inicial** ou **solução do problema de Cauchy**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad (t_0, \mathbf{x}_0)$$

se, além de φ ser solução, também satisfaz

$$\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares Lineares de 1ª Ordem

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t),$$

com $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em I.

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares Lineares de 1ª Ordem **homogéneas**

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x,$$

com $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em I.

A solução geral de uma equação diferencial ordinária, escalar de primeira ordem, linear e homogénea

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x,$$

com $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é dada por

$$x(t) = C\, e^{\int a(t)dt},$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

A solução do problema de Cauchy, com condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ em $t_0 \in I$, é dada por

$$x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$